文章编号:1674－2869(2015)06－0063－04

基于三角方法的 Cauchy 主值积分数值计算

胡婷婷,刘　姣,金国祥*
武汉工程大学计算机科学与工程学院,湖北 武汉 430205

摘　要:用三角变量替换的方法把含 Cauchy 核的主值积分变换到[0,π)上含三角函数核的主值积分,用非等距结点的π(反)周期三角插值多项式作为工具去逼近新的主值积分的被积函数,构造出含 Cauchy 核主值积分的一个新的内插型求积公式,根据求积公式视结点个数的奇偶性不同给出了求积公式的不同表达式,推导出求积公式中求积系数的循环关系式. 最后以一个实例在计算机上用 Matlab 编程实现,用得到的数值结果和图像来说明所得求积公式的误差渐进性.

关键词:Cauchy 主值积分;三角插值;求积公式
中图分类号:O241.38　O174.41　　**文献标识码**:A　　**doi**:10. 3969/j. issn. 1674-2869. 2015. 06. 013

0　引　言

由于奇异积分解决了工程技术领域中的许多实际问题,近年来 Cauchy 主值积分

$$I(f;t)=\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-1}^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^{1}\right)\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\quad |t|<1 \tag{1}$$

的数值计算问题受到许多学者的关注. 这里只列出少量参考**文献**[1–6];由于 Cauchy 奇异核的特性,在构造(1)的各种求积公式时,基本上都采用去掉奇异性的方法,把式(1)转化成通常意义下的广义积分,然后用适当的代数多项式逼近新的广义积分的被积函数而得到求积公式,大多数学者在构造式(1)的求积公式时,主要着眼于被积函数的各种逼近,很少用变量替换去变换 Cauchy 奇异核,而P. Kim 和 U. J. Choi 在 2000 年对式(1)中积分变量进行三角变换,对变换后的主值积分用三角余弦插值多项式去逼近被积函数而得到一种内插型求积公式[7]. **文献**[7]用三角变量变换式(1)的奇异核而得到的求积公式不同于以往式(1)的求积公式,实际上他们是在构造一个新的奇异核的主值积分求积公式;但**文献**[7]也有不足,由于**文献**[7]中没使用[0,π)上的非等距结点的三角插值工具,他们只构造出[0,π)上 2^n 个等距结点的求积公式,这在应用上会带来诸多不便. 与**文献**[7]不同的是,本文构造式式(1)的求积公式时取消了对结点个数和等距的限制,并用一个实例来说明求积公式与原积分的误差渐进性.

1　π(反)周期三角多项式插值

为了构造(1)的非等距结点求积公式,下面引用**文献**[8]中的一些结果.

定义:如果三角多项式 $T(x)$满足:$T(x+\pi)=T(x)$,称 $T(x)$是 π 周期三角多项式;如果 $T(x)$满足 $T(x+\pi)=-T(x)$,称 $T(x)$是 π 反周期三角多项式.

所有 π 周期三角多项式组成的集合记为 ω. 所有 π 反周期三角多项式组成的集合记为 H. 由**文献**[8]可知:

$$\omega=\left\{\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos2kx+b_k\sin2kx),n\geqslant0,a_k,b_k\text{ 为常数}\right\} \tag{2}$$

$$H=\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(2k-1)x+b_k\sin(2k-1)x),n\geqslant0,a_k,b_k\text{ 为常数}\right\} \tag{3}$$

设 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n<\pi$,$v(x)=\sin(x-x_1)\cdots\sin(x-x_n)$,$v_j(x)=v(x)/\sin(x-x_j)$.

引理[8](1) 当 $n=2q+1$ 时,对任何复数 $y_1,\cdots,y_n$,存在唯一的 $n-1$ 阶 π 周期三角多项式 $T(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{v_j(x_j)}v_j(x)$ 满足插值条件 $T(x_j)=y_j,j=1,2,\cdots,n$.

(2)当 $n=2q$ 时,对任何复数 $y_1,\cdots,y_n$,存在唯一的 $n-1$ 阶 π 反周期三角多项式 $T(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{v_j(x_j)}v_j(x)$ 满足插值条件 $T(x_j)=y_j,j=1,2,\cdots,n$.

收稿日期:2015–04–22
基金项目:湖北省教育厅科研基金重点项目(D20101506)
作者简介:胡婷婷(1990–)女,湖北荆州人,硕士研究生.研究方向:奇异积分方程数值计算.* 通信联系人.

2 Cauchy 主值积分的非等距结点求积公式

令 $\tau=\cos y$,$t=\cos x$,代入式(1)有[7]:

$$\mathrm{I}(f(\cos\cdot);(\cos x))=\int_0^\pi \frac{f(\cos y)\sin y}{\cos y-\cos x}dy$$
$$=\int_0^\pi \frac{h(y)\sin y-h(x)\sin x}{\cos y-\cos x}dy$$
$$=I(h;x)\ , \quad (4)$$

式(4)中 $h(y)=f(\cos y)$.

设 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n<\pi$,下面分 n 的奇偶性构造(4)的求积公式,为此,用$[0,\pi)$上非等距结点的三角插值多项式去逼近式(4)中的 $h(y)$,即用

$$T(y)=\sum_{j=1}^{n}\frac{h(x_j)}{v_j(x_j)}v_j(y) \quad (5)$$

去逼近式(4)中的 $h(y)$.

(1)当 $n=2q+1$ 时,由引理知,式(5)中 $v_j(x)$是 $n-1=2q$ 阶 π 周期三角多项式.由式(2)知:

$$v_j\ (x)=a_{j0}+a_{j1}\cos 2x+b_{j1}\sin 2x+\cdots+a_{jq}\cos 2qx+b_{jq}\sin 2qx=\sum_{k=0}^{q}(a_{jk}\cos 2kx+b_{jk}\sin 2kx)\ j=1,2,\cdots,n, \quad (6)$$

其中,$a_{j0}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi v_j(x)dx$,

$$a_{jk}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_j(x)\cos 2kx dx \quad k=1,2,\cdots,q,$$

$$b_{jk}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_j(x)\sin 2kx dx \quad k=1,2,\cdots,q.$$

构造式(4)的求积公式:

$$Q(h;x)=\int_0^\pi \frac{T(y)\sin y-T(x)\sin x}{\cos y-\cos x}dy=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{h(x_j)}{v_j(x_j)}\int_0^\pi \frac{v_j(y)\sin y-v_j(x)\sin x}{\cos y-\cos x}dy=$$
$$\sum_{j=1}^{n}H_j\frac{h(x_j)}{v_j(x_j)} \quad (7)$$

式(7)中 $H_j=\int_0^\pi \frac{v_j(y)\sin y-v_j(x)\sin x}{\cos y-\cos x}dy, j=1,2,\cdots,n.$

将式(6)代入有

$$H_j=$$
$$\int_0^\pi\left(\frac{\sum_{k=0}^{q}(a_{jk}\cos 2ky+b_{jk}\sin 2ky)\sin y}{\cos y-\cos x}-\frac{\sum_{k=0}^{q}(a_{jk}\cos 2kx+b_{jk}\sin 2kx)\sin x}{\cos y-\cos x}\right)dy=$$
$$\sum_{k=0}^{q}a_{jk}\int_0^\pi \frac{\cos 2ky\sin y-\cos 2kx\sin x}{\cos y-\cos x}dy+$$
$$\sum_{k=1}^{q}b_{jk}\int_0^\pi \frac{\sin 2ky\sin y-\sin 2kx\sin x}{\cos y-\cos x}dy$$
$$=\sum_{k=0}^{q}a_{jk}I_{2k+1}+\sum_{k=1}^{q}b_{jk}J_{2k+1}$$

其中

$$I_{2k+1}=\int_0^\pi \frac{\cos 2ky\sin y-\cos 2kx\sin x}{\cos y-\cos x}dy=$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\sin(2k+1)y-\sin(2k+1)x}{\cos y-\cos x}-\frac{\sin(2k-1)y-\sin(2k-1)x}{\cos y-\cos x}\right)dy$$

$k=0,1,2,\cdots,q$

$$J_{2k+1}=\int_0^\pi \frac{\sin 2ky\sin y-\sin 2kx\sin x}{\cos y-\cos x}dy=$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\cos(2k+1)y-\cos(2k+1)x}{\cos y-\cos x}-\frac{\cos(2k-1)y-\cos(2k-1)x}{\cos y-\cos x}\right)dy,$$

$k=0,1,2,\cdots,q$.

(2)当 $n=2q$ 时,同 $n=2q+1$ 时一样,得到式(4)的求积公式为

$$Q(h;x)=\sum_{j=1}^{n}D_j\frac{h(x_j)}{v_j(x_j)} \quad (8)$$

其中

$$D_j=\int_0^\pi \frac{v_j(y)\sin y-v_j(x)\sin x}{\cos y-\cos x}dy=\sum_{k=1}^{q}a_{jk}A_{2k}+\sum_{k=1}^{q}b_{jk}B_{2k}$$

而 $A_{2k}=\int_0^\pi \frac{\cos(2k-1)y\sin y-\cos(2k-1)x\sin x}{\cos y-\cos x}dy, k=1,2,\cdots,q$

$$B_{2k}=\int_0^\pi \frac{\sin(2k-1)y\sin y-\sin(2k-1)x\sin x}{\cos y-\cos x}dy, k=1,2,\cdots,q$$

由 $\frac{\sin(2k+1)y-\sin(2k+1)x}{\cos y-\cos x}=2\sin 2ky+$

$$2\cos x\frac{\sin 2ky-\sin 2kx}{\cos y-\cos x}-\frac{\sin(2k-1)y-\sin(2k-1)x}{\cos y-\cos x},$$

$$\frac{\cos(2k+1)y-\cos(2k+1)x}{\cos y-\cos x}=2\cos 2ky+$$

$$2\cos x\frac{\cos 2ky-\cos 2kx}{\cos y-\cos x}-\frac{\cos(2k-1)y-\cos(2k-1)x}{\cos y-\cos x}$$

可得到式(7)、式(8)中求积系数的递推关系:

$$I_{2k+1}=2\cos xA_{2k}-I_{2k-1}$$
$$A_{2k}=2\cos xI_{2k-1}-A_{2k-2}+\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k-3}$$
$$J_{2k+1}=2\cos xB_{2k}-J_{2k-1}$$
$$B_{2k}=2\cos xJ_{2k-1}-B_{2k-2}, k=2,\cdots,q$$
$$I_1=\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}, J_3=-\cos\pi 2x$$

$A_2=2+\cos x\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$B_2=-\pi\cos x$

3　数值实例

设 $h(x)=x^2$

$n=3$,结点为 $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$

$n=4$,结点为 $0,\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{2}$

$n=5$,结点为 $0,\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{2}$

$n=7$,结点为 $0,\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{3.5\pi}{10},\frac{2\pi}{5},\frac{2.3\pi}{5},\frac{\pi}{2}$

$n=6$,结点为 0,0.3,0.7,1.0,1.2,1.5

$n=8$,结点为 $0,0.24,0.5,0.77,0.99,1.21,1.4,\frac{\pi}{2}$.

图 1、图 2 和图 3 分别是结点个数,$n=4,6,8$ 和 $n=4,5,7$,$n=4,6,8$ 和 $n=3,5,7$ 时,Lagrange 三角插值函数的图像,并与原函数,$h(x)=x^2$ 进行对比分析,以此来说明插值函数的逼近效果.

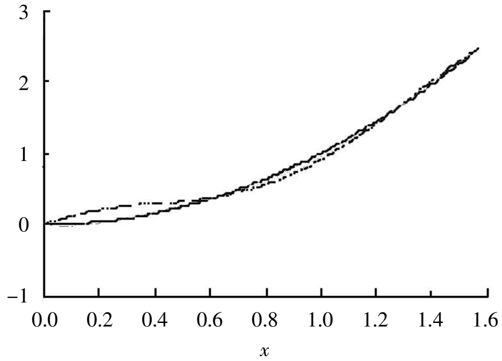

图 1　$n=4,5,7$ 时,插值函数图像

Fig.1　Interpolation function image as $n=4,5,7$

注: — $y=x^2$;　…… $n=5$;　----- $n=4$;　-·-·- $n=7$

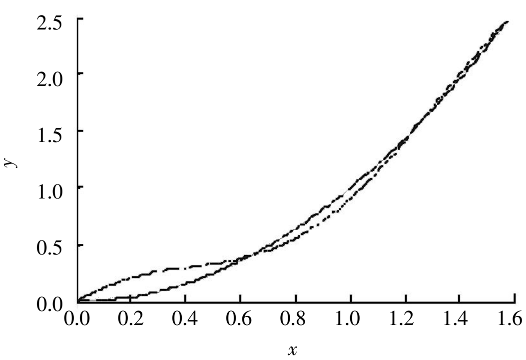

图 2　$n=4,6,8$ 时,插值函数图像

Fig.2　Interpolation function image as $n=4,6,8$

注: — $y=x^2$;　…… $n=6$;　----- $n=4$;　-·-·- $n=8$

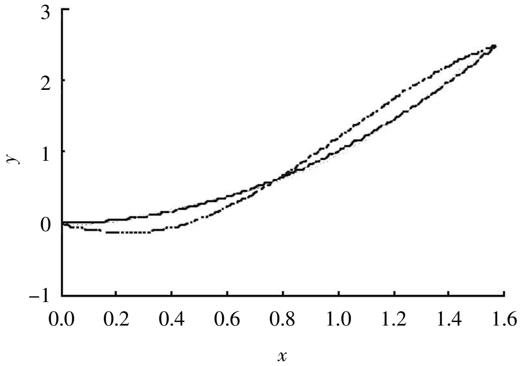

图 3　$n=3,5,7$ 时,插值函数图像

Fig.3　Interpolation function image as $n=3,5,7$

注: — $y=x^2$; …… $n=5$;　----- $n=3$; -·-·- $n=7$

从实验结果可以看出,不需要取很大的 n 就可以达到比较好的逼近效果,当然 n 越大,误差越小,下面数值积分结果也说明了这一点.

$h(x)=\cos^2 x$ 的数值积分结果:

ans=

0.725 346 783 495 405 195 471 535 184 865 77

求积公式的数值积分结果:

ans=

0.725 346 927 832 973 416 754 505 852 979 64

致　谢

感谢湖北省教育厅对本项目的支持!

参考文献:

[1]　杜金元.奇异积分的数值计算[J].华中师范学院学报,1985(2):15-28.
DU Jin-yuan.On the numerical evaluation of singular integrals [J].Journal of central China teachers college,1985(2):15-28.(in Chinese)

[2]　路见可,杜金元.奇异积分方程的数值解法[J].数学进展,1991,20(3):278-293.
LU Jian-ke, DU Jin-yuan. The numerical solution of singular integral equations [J]. Advances in Mathematics,1991,20(3):278-293.(in Chinese)

[3]　HASEGAWA T,TORII T.An automatic quadrature for Cauchy principal value integrals[J]. Math Co-mp,1991(56):741-754.

[4]　HUNTER D B. Some Gauss-type formulae for the evaluation of Cauchy principal values of inte grals[J]. Numer Math,1972(19):419-424.

[5]　金国祥. 含 Hilbert 核的奇异积分带重结点的求积公式[J].数学杂志,1997,17(3):427-432.
JIN Guo-xiang.Quadrature formulae with multiple nodes for singular integrals with Hilbert kernel[J]. Journal of

mathematics, 1997, 17(3): 427-432.(in Chinese)
[6] LU Jian-ke.A class of quadrature formulas of chebyshev type for singular integrals [J]. J Ma-Th Anal Appl, 1984(100): 416-435.
[7] Philsu Kim, Choi U Jin. A quadrature rule of interpolatory type for Cauchy integrals [J]. J Comp Appl Math, 2000(126): 207-220.
[8] Delvos.Hermite interpolation with trigonometric polynomials[J]. BIT, 1993(33): 113-123.

Numerical computation of principal value integrals with Cauchy kernel based on trigonometric method

HU Ting-ting, *LIU Jiao*, *JIN Guo-xiang*
School of Computer Science and Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China

Abstract: Using the method of changing trigonometric variable, a principal value integral with Cauchy kernel was transformed to a principal value integral with trigonometric functions kernel. The new interpolatory-type quadrature formulae were constructed for the principal value integral with Cauchy kernel, in which the integrand of the new principal value integral was approximated using the tool of π-(antiperiodic)periodic trigonometric interpolation polynomial with nonequdistant nodes. The different representations of the quadrature formulae were made depending on the odd and even numbers of the nodes, and the recurrence relations of the quadrature coefficients were derived. Finally, the asymptotic error of the quadrature formulae was illustrated, using the numerical result and images from a case realized by Matlab.

Keywords: Cauchy principal value integrals; trigonometric interpolation; quadrature formulae

本文编辑:陈小平