

任意线弹性支承的双跨压杆稳定性计算

黄开志, 陈小亮

重庆科技学院数理学院, 重庆 401331

摘要:用初参数法,建立了任意线弹性支承的双跨压杆处于微弯曲平衡状态时,统一的变形方程、静力平衡方程和物理方程.由齐次线性方程组有非零解的条件,导出了临界压力的特征方程.借助软件,对中部铰支的9种完全理想支承的双跨压杆,和一个非完全理想支承的双跨压杆进行了稳定性计算,得到了长度因数与中部支承位置之间的关系,确定了中部支承的最佳位置和最小长度因数,以及最差位置和最大长度因数;同时发现定向-铰支-定向和定向-铰支-自由支承的双跨压杆的长度因数与中部铰支的具体位置无关,其大小依次为1和2.

关键词:材料力学;线弹性支承;压杆;稳定性;临界压力;特征方程;欧拉公式;长度因数

中图分类号:O341

文献标识码:A

doi:10.3969/j.issn.1674-2869.2014.09.002

0 引言

一些文献^[1-5]采用了统一的计算模型,得到了各种完全理想支承下的等截面细长压杆临界压力计算公式.工程实际中,由于一些结构的特殊需求或制造工艺上的缺陷或制造成本等因素,其连接处既不是完全理想铰支也不是完全理想固支,而是处于半刚性连接状态^[6],即支承对压杆的挠度约束的刚度系数或(和)对压杆的转角约束的刚度系数不是零或无穷大,而是介于零与无穷大之间.为此,需要解决各种可视为弹性支承的压杆临界压力计算问题.文献^[7-8]等对弹性支承的单跨压杆

进行了研究,文献^[9-10]对完全理想支承的连续梁式压杆进行了研究.对各种需视为线弹性支承的双跨压杆,鲜见文献建立临界压力的统一的特征方程并进行系统的分析.

本文拟对任意线弹性支承的双跨压杆建立统一的临界压力特征方程,以方便工程应用.

1 公式推导

设长为 l 、抗弯刚度为 EI 的双跨压杆在 A 、 B 、 C 处受任意线弹性支承,其处于微弯曲平衡状态,其受力和变形可建立如图1所示模型.

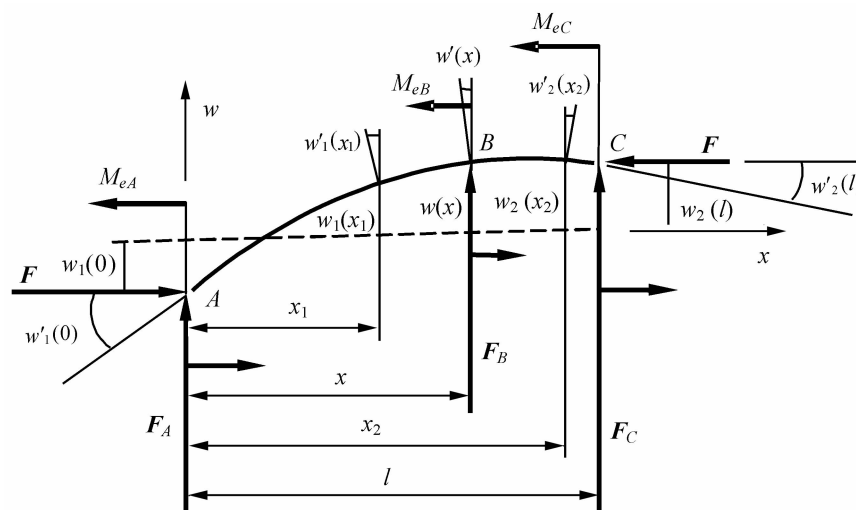


图1 整体微弯曲平衡状态

Fig. 1 Micro bending equilibrium state of whole

收稿日期:2014-03-28

基金项目:重庆科技学院教改项目(201442);重庆科技学院研究生教育教学改革研究一般项目(YJG2014y008)

作者简介:黄开志(1969-),男,四川遂宁人,教授级高工.研究方向:力学计量测试技术.

1.1 变形方程

AB 段即 $0 \leq x_1 \leq x$ 时, 弯矩方程

$$M_1(x_1) = F_A x_1 - M_{eA} - F[w_1(x_1) - w_1(0)].$$

由挠曲线近似微分方程 $EI w_1''(x_1) = M_1(x_1)$ 得

$$EI w_1''(x_1) = F_A x_1 - M_{eA} - F[w_1(x_1) - w_1(0)].$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$, 则挠曲线方程 $w_1(x_1)$ 的通解为

$$w_1(x_1) = a \cos k x_1 + b \sin k x_1 + \frac{F_A}{F} x_1 -$$

$$\frac{M_{eA}}{F} + w_1(0). \quad (1)$$

转角方程

$$w_1'(x_1) = -a k \sin k x_1 + b k \cos k x_1 + \frac{F_A}{F}. \quad (2)$$

BC 段即 $x \leq x_2 \leq l$ 时, 弯矩方程

$$M_2(x_2) = F_C(l - x_2) + M_{eC} - F[w_2(x_2) -$$

$$w_2(l)].$$

由挠曲线近似微分方程 $EI w_2''(x_2) = M_2(x_2)$

得

$$EI w_2''(x_2) = F_C(l - x_2) + M_{eC} - F[w_2(x_2) - w_2(l)].$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$, 则 $w_2(x_2)$ 的通解为

$$w_2(x_2) = c \cos k x_2 + d \sin k x_2 + \frac{F_C}{F}(l - x_2) +$$

$$\frac{M_{eC}}{F} + w_2(l), \quad (3)$$

$$w_2'(x_2) = -c k \sin k x_2 + d k \cos k x_2 - \frac{F_C}{F}. \quad (4)$$

1.2 变形边界条件

在式(1)和式(2)中令 $x_1 = 0$, 得到压杆 A 处的变形满足

$$a - \frac{M_{eA}}{F} = 0, \quad (5)$$

$$b k + \frac{F_A}{F} - w_1'(0) = 0. \quad (6)$$

压杆在 B 处左边变形连续, 即

$$w_1(x) - w(x) = 0, w_1'(x) - w'(x) = 0.$$

在式(1)和式(2)中令 $x_1 = x$, 得

$$a \cos k x + b \sin k x + \frac{F_A}{F} x - \frac{M_{eA}}{F} + w_1(0) -$$

$$w(x) = 0, \quad (7)$$

$$-a k \sin k x + b k \cos k x + \frac{F_A}{F} - w_1'(x) = 0. \quad (8)$$

压杆在 B 处右边变形连续, 即

$$w_2(x) - w(x) = 0, w_2'(x) - w'(x) = 0.$$

在式(3)和式(4)中令 $x_2 = x$, 得

$$c \cos k x + d \sin k x + \frac{F_C}{F}(l - x) + \frac{M_{eC}}{F} - w(x) +$$

$$w_2(l) = 0, \quad (9)$$

$$-c k \sin k x + d k \cos k x - \frac{F_C}{F} - w'(x) = 0. \quad (10)$$

在式(3)和式(4)中令 $x_2 = l$, 得到压杆 C 处的变形满足

$$c \cos k l + d \sin k l + \frac{M_{eC}}{F} = 0, \quad (11)$$

$$-c k \sin k l + d k \cos k l - \frac{F_C}{F} - w_2'(l) = 0. \quad (12)$$

1.3 静力平衡条件

$$\frac{F_A}{F} + \frac{F_B}{F} + \frac{F_C}{F} = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{F_A}{F} x + \frac{M_{eA}}{F} + \frac{M_{eB}}{F} + \frac{F_C}{F}(l - x) + \frac{M_{eC}}{F} -$$

$$w_1(0) + w_2(l) = 0. \quad (14)$$

1.4 物理条件

设线弹性支承 A、B、C 对压杆的挠度约束的刚度系数分别为 K_A 、 K_B 、 K_C , 对压杆的转角约束的刚度系数分别为 C_A 、 C_B 、 C_C , 则压杆在支承处的约束反力和变形满足下述条件:

$$F_A = -K_A w_1(0),$$

$$M_{eA} = -C_A w_1'(0),$$

$$F_B = -K_B w(x),$$

$$M_{eB} = -C_B w'(x),$$

$$F_C = -K_C w_2(l),$$

$$M_{eC} = -C_C w_2'(l).$$

上述 6 式均除 F , 并考虑到 $F = k^2 EI$, 则有:

$$\frac{F_A}{F} + \frac{K_A}{k^2 EI} w_1(0) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{M_{eA}}{F} + \frac{C_A}{k^2 EI} w_1'(0) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{F_B}{F} + \frac{K_B}{k^2 EI} w(x) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{M_{eB}}{F} + \frac{C_B}{k^2 EI} w'(x) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{F_C}{F} + \frac{K_C}{k^2 EI} w_2(l) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{M_{eC}}{F} + \frac{C_C}{k^2 EI} w_2'(l) = 0. \quad (20)$$

1.5 特征方程

由式(5)~式(20)确定了一个关于 16 个初参数 a 、 b 、 c 、 d 、 F_A/F 、 M_{eA}/F 、 F_B/F 、 M_{eB}/F 、 F_C/F 、 M_{eC}/F 、 $w_1(0)$ 、 $w_1'(0)$ 、 $w(x)$ 、 $w'(x)$ 、 $w_2(l)$ 、 $w_2'(l)$ 的齐次线性方程组, 其有非零解的充要条件是方程组的系数行列式为零, 由此得到临界压力的特征方程(21).

1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	k	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
$\cos kx$	$\sin kx$	0	0	x	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0
$-k \sin kx$	$k \cos kx$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	$\cos kl$	$\sin kl$	0	0	0	0	$l-x$	1	0	0	-1	0	1	0
0	0	$-k \sin kl$	$k \cos kl$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	$\cos kl$	$\sin kl$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	$-k \sin kl$	$k \cos kl$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-x$	1	0	1	$l-x$	1	$-\frac{1}{k^2 EI}$	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{K_A}{k^2 EI}$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{C_A}{k^2 EI}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{K_B}{k^2 EI}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{C_B}{k^2 EI}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{K_C}{k^2 EI}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{C_C}{k^2 EI}$

=0. (21)

2 公式应用

这里将线弹性支承的双跨压杆分为完全理想支承双跨压杆和非完全理想支承双跨压杆。

完全理想支承双跨压杆是指每个刚度系数只能取零或无穷大的压杆,其取值见表 1 所示. 非完全理想支承双跨压杆是指至少有一个刚度系数为非零有界值的压杆。

表 1 完全理想支承刚度系数

Table 1 Stiffness coefficient of completely ideal support

支承情况	刚度系数	
	K_i	C_i
固支	∞	∞
铰支	∞	0
定向	0	∞
自由	0	0

$i=A,B,C$

2.1 完全理想支承压杆

其作为线弹性支承双跨压杆的特例,在工程中很常见,其处理过程如下:

a. 根据压杆在 A、B、C 处支承情况,先在 (21) 式中置刚度系数为零的项为零,并用软件如 maple 等展开,接着用所有非零刚度系数的乘积去除展开式(符号运算),最后对所有非零刚度系数取无穷大,则能充分消项;

b. 令 $x=ml, k=\frac{\pi}{ul}$, 得到仅含参数 m 和 u 的方程 $f(m,u)=0$;

c. 绘制 $f(m,u)=0$ 曲线,则 $0 \leq m \leq 1$ 且 $0.25 \leq u \leq 2$ 区域曲线即为所求 $m-u$ 曲线;

d. 籍欧拉公式 $F=\frac{\pi^2 EI}{(ul)^2}$ 可计算临界压力。

本文以中部支座 B 为铰支的 9 种压杆为例进行了计算,结果见图 2。

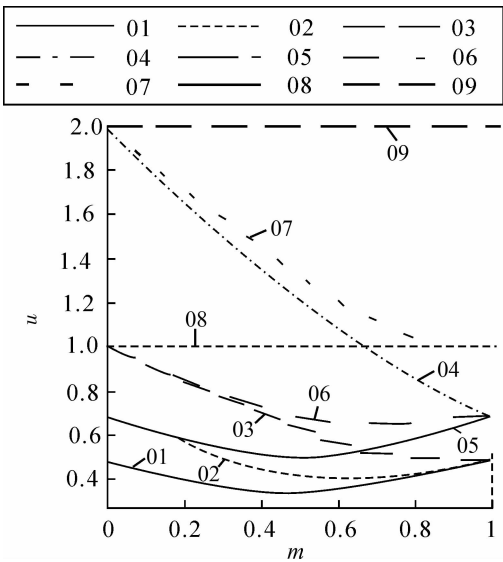


图 2 $m-u$ 曲线

Fig. 2 The curve of $m-u$

图 2 中, $m-u$ 曲线的最低点坐标表示中部支承的最佳位置及最小的长度因数,最高点坐标表示最差位置及最大的长度因数. 表 2 中,加粗(含斜体加粗)数字表示中部支承 B 在最佳位置 m_0 时,压杆的最小长度因数 u_{\min} . 斜体(含斜体加粗)数字表示中部支承 B 无限靠近压杆左右两端(即 $m=0$ 或 $m=1$)时,压杆的长度因数 u ,该结果与表 3 所述的等效的单跨压杆的长度因数一致,符合理论预期。

由图 2 不难发现,08 号曲线(定向-铰支-定向)和 09 号曲线(定向-铰支-自由)为水平直线,即这类压杆的长度因数与中部支承位置无关.工程中可利用这个特点,使压杆设计和施工具有一定的灵活性,即在确保

压杆功效不变的同时,有时还能降低制造成本.

由表 2 中的长度因数 u 并利用欧拉公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(ul)^2} \text{ 可计算临界压力,计算略.}$$

表 2 长度因数(u)

Table 2 Factor of length(u)

No	m	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
01	固支-铰支-固支	0.50	0.46	0.43	0.39	0.36	0.35	0.36	0.39	0.43	0.46	0.50
02	固支-铰支-铰支	0.70	0.64	0.59	0.54	0.49	0.44	0.41	0.41	0.44	0.47	0.50
03	固支-铰支-定向	1.00	0.91	0.85	0.77	0.70	0.63	0.57	0.53	0.51	0.50	0.50
04	固支-铰支-自由	2.00	1.83	1.70	1.54	1.40	1.25	1.11	0.98	0.85	0.76	0.70
05	铰支-铰支-铰支	0.70	0.65	0.60	0.56	0.52	0.5	0.52	0.56	0.60	0.65	0.70
06	铰支-铰支-定向	1.00	0.93	0.87	0.80	0.75	0.70	0.67	0.67	0.68	0.69	0.70
07	铰支-铰支-自由	2.00	1.85	1.75	1.59	1.47	1.34	1.23	1.13	1.05	1.01	1.00
08	定向-铰支-定向	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
09	定向-铰支-自由	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

2.2 非完全理想支承压杆

非完全理想支承双跨压杆的每个支承的两个刚度系数一般为有界值.若其某些刚度系数为无穷大,则先按 2.1a 处理即可.

算例:设某线弹性支承的双跨压杆 $l=10$ m, $EI=0.5$ MN·m², $K_A=0.2$ MN/m, $C_A=0.1$ MN·m/rad, $K_B=0$, $C_B=0.3$ MN·m/rad, $K_C=0.2$ MN/m, $C_C=0$. 处理过程与 2.1 类似,结果见图 3.

由图 3 知,当 $m_0=0.88$ 时, $u_{\min}=0.68$; $m_1=0.52$ 时, $u_{\max}=0.88$.

由图 3 知,当 $m=0$ 时, $u=0.78$,该压杆应接近但弱于固支-铰支压杆,而固支-铰支压杆的长度因数为 0.7,即 $u=0.78>0.7$;当 $m=1$ 时, $u=0.71$,该压杆应接近但弱于固支-固支压杆,而固支-固支压杆的长度因数为 0.5,即 $u=0.71>0.5$.结果符合理论预期.

利用公式 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(ul)^2}$ 可计算该压杆的临界压力,计算略.

表 3 等效压杆

Table 3 The equivalent long column

No	m	0	1.0
01	固支-铰支-固支	固支-固支	固支-固支
02	固支-铰支-铰支	固支-铰支	固支-固支
03	固支-铰支-定向	固支-定向	固支-固支
04	固支-铰支-自由	固支-自由	固支-铰支
05	铰支-铰支-铰支	固支-铰支	铰支-固支
06	铰支-铰支-定向	固支-定向	铰支-固支
07	铰支-铰支-自由	固支-自由	铰支-铰支
08	定向-铰支-定向	固支-定向	定向-固支
09	定向-铰支-自由	固支-自由	定向-铰支

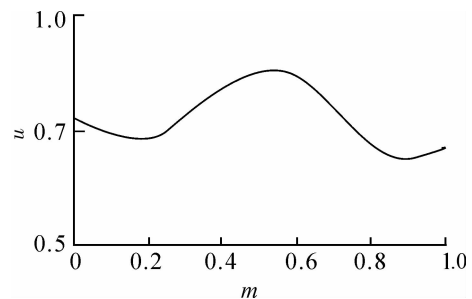


图 3 $m-u$ 曲线

Fig. 3 The curve of $m-u$

3 结 语

本文从材料力学角度,采用初参数法对任意线弹性支承的双跨压杆的稳定性进行了计算,得到了计算临界压力的特征方程.对任意线弹性支承的多跨压杆的稳定性计算问题,也可参照该方法进行类似处理,但计算量会变得更大.

致 谢

本文得到重庆科技学院的资助,在此表示衷心的感谢!

参考文献:

- [1] 李有兴,肖芳淳.用弯剪矩阵法确定压杆临界力的教学研究[J].力学与实践,1995,17(1):69-71.
- [2] 张春晓.关于弯剪矩阵的思考[J].力学与实践.1997,19(2):68-69.
- [3] 冯贤贵.细长压杆临界压力的统一推导[J].力学与实践,2003(4):65-67.
- [4] 曾生桥.细长压杆临界压力欧拉公式的另一种统一推导[J].常州工学院学报,2007,20(2):48-50.

- ZENG Sheng-qiao. Another uniform inference for Euler formula about critical load of slender compressive rod[J]. Journal of Changzhou Institute of Technology, 2007, 20(2): 48-50. (in Chinese)
- [5] 董冠文,李宗义,赵彦军,等. 压杆稳定临界力欧拉公式统一推导[J]. 武汉工程大学学报, 2012, 34(12): 71-74.
- DONG Guan-wen, LI Zong-yi, ZHAO Yan-jun, et al. Unified deduction of pressure lever stability critical force euler formula[J]. Journal of Wuhan Institute of Technology, 2012, 34(12): 71-74. (in Chinese)
- [6] 叶学林,周瑞忠. 半刚性连接压杆的稳定计算公式[J]. 福建建筑, 2003, 增刊: 21-23.
- YE Xue-lin, ZHOU Rui-zhong. Stability calculating formulas of the axially compressed members with sem rigid connections[J]. Fujian Construction Science & Technology, 2003, Suppl: 21-23. (in Chinese)
- [7] 刘协权,倪新华. 支承弹性对压杆临界载荷的影响[J]. 机械工程学院学报, 2003, 15(9): 73-78.
- LIU Xie-guan, NI Xin-hua. Effect of elastic support on critical compressive forces for columns [J]. Journal of Ordnance Engineering College, 2003, 15(9): 73-78. (in Chinese)
- [8] 宣海洋. 弹性介质上等截面压杆稳定分析[J]. 山西建筑, 2010, 36(3): 45-46.
- XUAN Hai-yang. On stability analysis of equal section's compress bar on elastic medium[J]. Shanxi Architecture, 2010, 36(3): 45-46. (in Chinese)
- [9] 倪晓博,许笛. 连续梁式压杆固有频率与稳定性分析[J]. 科技创新导报, 2010(5): 112.
- [10] 蒋学东,李小平. 连续压杆稳定性初参数法的研究[J]. 江苏工业学院学报, 2003, 15(2): 43-45.
- JIANG Xue-dong, LI Xiao-ping. Research on the stability of continous section press pole[J]. Journal of Jiangsu Polytechnic University, 2003, 15(2): 43-45.

Calculating stability of double span long column supported by any linear elastic supports

HUANG Kai-zhi, CHEN Xiao-liang

School of Mathematics & Physics, Chongqing University of Science & Technology, Chongqing 401331, China

Abstract: The unified deformation equation, the static equilibrium equations and the constitutive equation were established to double span long column supported by any linear elastic supports in the equilibrium state of micro bending by the initial parameters method. The characteristic equation of critical force was deduced by the condition of homogeneous linear equations with non-zero solution. The stability of nine kinds of double span long column supported by ideal hinge support in the central and a double span long column supported by non ideal supports was calculated using software. Finally, the relationship between the factor of length and the position of the central support was obtained; the best position of the central support and the minimum factor of length, and the worst position and the maximum factor of length were determined. It is found that the factor of length to the double span long column supported by directional support-hinge support-directional support and directional support-hinge support-free is irrelevant to the specific position of the central support, the values of which are 1 and 2 in order.

Key words: mechanics of materials; linear elastic support; long column; stability; critical force; characteristic equation; Euler's formula; factor of length

本文编辑: 龚晓宁