

# 压杆稳定临界力欧拉公式统一推导

董冠文,李宗义,赵彦军,王泽荫,杨 龙,张庆华,杜建霞,赵典凯

(甘肃机电职业技术学院,甘肃 天水 741001)

**摘 要:**针对以往用弯剪方程挠曲线微分方程对压杆稳定临界力欧拉公式做了统一推导,既考虑剪力又考虑弯矩,没有体现真正意义上的杆的整体变形效应的问题,提出了以一端固定另一端铰支的细长压杆微小弯曲挠曲线方程作为统一的挠曲线方程,分别代入压杆两端铰支失稳、压杆一端固定另一端自由失稳、压杆两端固定失稳、压杆一端固定另一端定向可移动夹紧失稳的临界力边界条件的方法,结果表明:压杆两端铰支失稳临界力 Euler(欧拉)公式,长度因数  $\mu=1$ ;压杆一端固定另一端铰支失稳临界力 Euler 公式,长度因数  $\mu=0.7$ ;压杆一端固定另一端自由失稳临界力 Euler 公式,长度因数  $\mu=2$ ;压杆两端固定失稳临界力 Euler 公式,长度因数  $\mu=0.5$ ;压杆一端固定另一端定向可移动夹紧失稳的临界力 Euler 公式,长度因数  $\mu=1$ ,结果与工程力学或材料力学现有教材完全一致,表明此方法正确可行.使用此方法对压杆稳定临界力欧拉公式做了统一推导,真正体现了杆的整体变形效应,揭示了压杆稳定与拉、压、弯、扭区别的本质.

**关键词:**细长压杆;微小弯曲;压杆稳定;临界力;Euler 公式

**中图分类号:**O34

**文献标识码:**A

**doi:**10.3969/j.issn.1674-2869.2012.12.004

## 0 引 言

在工程力学或材料力学中对压杆稳定临界力推导方法很多,如静力法、能量法等<sup>[1]</sup>.分几种不同的约束条件,列出各自不同的挠曲线近似微分方程来求解,但该方法过于复杂,教材也不可能全部推导证明<sup>[1]</sup>.文献[1-2]利用弯矩微分方程和相应的力学边界条件对不同约束条件下的压杆稳定临界力 Euler(欧拉)公式做了统一推导.和一般教材相比,该方法过程虽然大大简化了,但压杆稳定问题本质上属于杆的整体变形效应问题,用边界条件求解容易出现不确定和解的不一致,这一点在文献[3]已经说明.

与文献[1-3]不同,以细长压杆微小弯曲的平衡条件建立了推导压杆稳定临界力 Euler 公式的统一的挠曲线方程,结合不同约束条件,得到了文献[4]中的五种不同约束条件下的压杆稳定临界力 Euler(欧拉)公式.

## 1 建立统一的挠曲线方程

为便于分析,现取一端固定,另一端铰支的细长压杆进行研究.

如图 1 所示,一端固定,另一端铰支的细长压杆失稳后,为使杆件平衡,上端铰支座应有横向反力  $F_R$ .于是挠曲线微分方程为

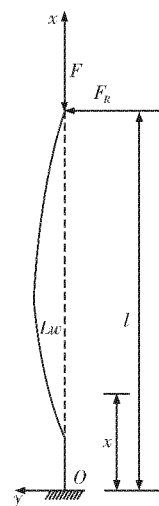


图 1 一端固定和另一端铰支的细长压杆失稳情况

Fig. 1 Situation of pole fixed at one end to the other end of slender columns hinged instability

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{Fw}{El} + \frac{F_R}{El}(l-x)$$

令  $k^2 = \frac{F}{EI}$ , 上式可以写成

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = \frac{F_R}{El}(l-x)$$

以上微分方程的通解是

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F_R}{F}(l-x) \quad (1)$$

由此求出  $w$  的一阶导数为

收稿日期:2012-09-23

作者简介:董冠文(1984-),男,甘肃天水人,助教.研究方向:模具结构中的力学.

$$\frac{dw}{dx} = Ak \cos kx - Bk \sin kx - \frac{F_R}{F} \quad (2)$$

## 2 不同杆端约束形式下的细长压杆的临界力

### 2.1 两端铰支的压杆

将边界条件  $F_R = 0, x = 0, w = 0$  代入式(1)得

$$B = 0$$

将边界条件  $F_R = 0, x = l, B = 0, w = 0$  代入式

(1)得

$$A \sin kl = 0$$

因为  $B = 0, A$  与  $B$  不能同时为零, 所以有  $A \neq B$  即

$$\sin kl = 0$$

进而有  $kl = n\pi$

将  $k^2 = \frac{F}{EI}$  代入上式得

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

取  $n = 1$  得临界压力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

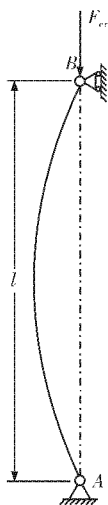


图 2 两端铰支的压杆失稳情况

Fig. 2 Situation of bending pole at both ends of the hinge support

### 2.2 一端固定和一端自由的压杆

将边界条件  $F_R = 0, x = 0, \frac{dw}{dx} = 0$  代入式

(2)得

$$A = 0$$

将边界条件  $F_R = 0, x = l, w = 0, A = 0$  代入式(1)得

$$B \cos kl = 0$$

因为  $A = 0, A$  与  $B$  不能同时为零, 所以有  $B \neq 0$  即  $\cos kl = 0$

进而有  $kl = \frac{(2n+1)\pi}{2}$

将  $k^2 = \frac{F}{EI}$  代入上式得

$$F = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 EI}{(2l)^2}$$

取  $n = 0$  得临界压力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

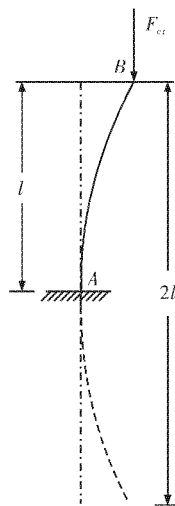


图 3 一端固定和一端自由的压杆失稳情况

Fig. 3 Situation of pole fixed at one end other one end of the free bending

### 2.3 两端固定的压杆

将边界条件  $F_R = 0, x = 0, \frac{dw}{dx} = 0$  代入式

(2)得

$$A = 0$$

将边界条件  $F_R = 0, x = 0, x = l, w(0) = w(l)$  代入式(1)得

$$B \cos kl = B$$

因为  $A = 0, A$  与  $B$  不能同时为零, 所以有  $B \neq 0$  即

$$\cos kl = 1$$

进而有  $kl = 2n\pi$

将  $k^2 = \frac{F}{EI}$  代入上式得

$$F = \frac{4n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

取  $n = 1$  得临界压力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\frac{l}{2})^2}$$

### 2.4 一端固定和另一端铰支的压杆

将边界条件  $x = 0, w = 0$  代入式(1)得

$$B + \frac{F_R}{F} L = 0 \quad (3)$$

将边界条件  $x = 0, \frac{dw}{dx} = 0$  代入式(2)得

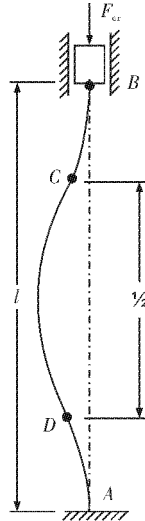


图 4 两端固定的压杆失稳

Fig. 4 Situation of the bending pole fixed at both ends

$$Ak - \frac{F_R}{F} = 0 \quad (4)$$

将边界条件  $x=l, w=0$  代入式(1)得

$$A \sin kl + B \cos kl = 0 \quad (5)$$

由式(3)、式(4)得

$$B = -Akl \quad (6)$$

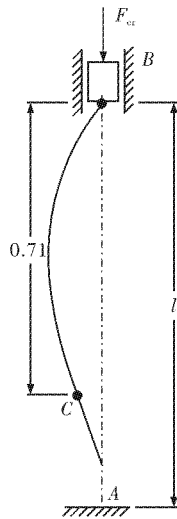


图 5 一端固定和另一端铰支的压杆失稳情况

Fig. 5 Situation of pole fixed at one end and the other end hinged bending

因为  $A$  与  $B$  不能同时为零,但式(6)式表明当  $A=0$  时,一定有  $B=0$ 只有当  $A \neq 0, B \neq 0$  时,才能同时满足式(6)和  $A$  与  $B$  不能同时为零的条件.

所以可以将式(6)代入式(5)得

$$\tan kl = kl$$

$$kl = 4.49$$

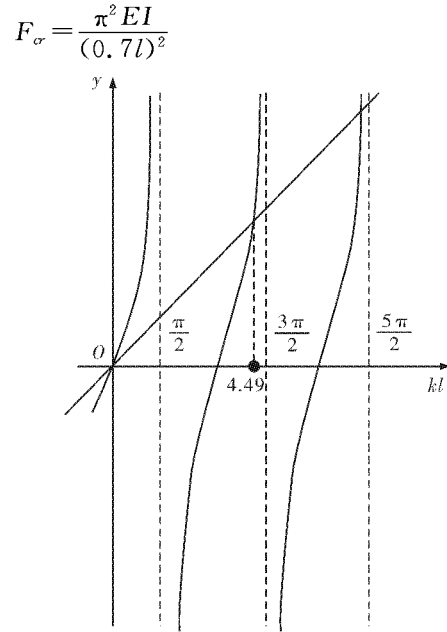
将  $k^2 = \frac{F}{EI}$  代入上式得  $F$  的最小值为

图 6 正切曲线与过原点的直线相交

Fig. 6 Situation of pole tangent curve and the straight line of the origin intersect

## 2.5 一端固定和一端定向可移动夹紧的压杆

将边界条件  $F_R=0, x=0, w=0$  代入式(1)得

$$B=0$$

$$\text{将边界条件 } F_R=0, B=0, \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = -\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}$$

代入式(2)得

$$Ak \cos kl = -Ak$$

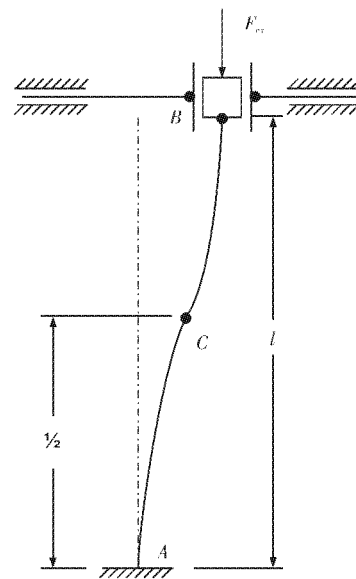
因为  $A$  与  $B$  不能同时为零,  $B=0$ , 一定有  $A \neq 0$  即  $\cos kl = -1$ 最小根为  $kl = \pi$ 

图 7 一端固定和一端定向可移动夹紧的压杆失稳情况

Fig. 7 One end fixed and other one end of the directional the movable clamping the strut instability

将  $k^2 = \frac{F}{EI}$  代入上式得临界压力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

综上所述,以上计算的临界力与文献[4]一致,因此可以写成统一形式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

式中: $\mu$  为长度因数,压杆两端铰支时, $\mu=1$ ;压杆一端固定,一端自由时, $\mu=2$ ;压杆两端固定时, $\mu=\frac{1}{2}$ ;压杆一端固定,一端铰支时, $\mu=0.7$ ;压杆一端固定,一端定向可移动夹紧时, $\mu=1$ 。

## 4 结 语

本研究首次提出了以一端固定另一端铰支的细长压杆微小弯曲挠曲线方程作为统一的挠曲线方程,分别代入压杆两端铰支失稳、压杆一端固定另一端自由失稳、压杆两端固失稳定、压杆一端固定另一端定向可移动夹紧失稳的临界力边界条件的方法,得到了上述条件下的压杆稳定欧拉公式。

若依据上述不同的约束条件,列出各自不同的挠曲线方程来求解,则加大了问题的求解难度,另外虽然也可用弯剪方程挠曲线方程对压杆稳定临界力欧拉公式做统一推导,但这样既考虑剪力又考虑弯矩,没有体现杆的整体变形效应。综上所述,压杆两端铰支失稳、压杆一端固定另一端自由失稳、压杆两端固失稳定、压杆一端固定另一端定向可移动夹紧失稳,这些情况都可以看做是压杆一端固定另一端铰支失稳情况下,横向反力  $F_R=0$  的情形,压杆稳定属于杆真正意义上的整体变形效应,与拉、压、弯、扭本质上存在区别。

## 参考文献:

- [1] 傅宁,杜家熙.用弯剪方程求细长压杆的临界力[J].河南职业技术学院学报,1999,27(1):39-40.
- [2] 李有兴,肖芳淳.用弯剪矩阵法确定压杆临界力的教学研究[J].力学与实践,1995,17(1):69-71.
- [3] 张晓春,关于弯剪矩阵法的思考[J].力学与实践,1997,19(2):68-69.
- [4] 李世荣.材料力学[M].北京:科学出版社,2010:200-203.

# Unified deduction of pressure lever stability critical force Euler formula

DONG Guan-wen, LI Zong-yi, ZHAO Yan-jun, WANG Ze-yin, YANG Long,  
ZHANG Qing-hua, DU Jian-xia, Zhao Dian-kai

(Gansu Mechanical & Electrical Vocational college, Tianshui 741001, China)

**Abstract:** Aimed at unified derivation of stability critical force Euler's formula of compression bar using deflection line differential equation of curved scissors equation, which considers the shear and bending moment, not reflecting in the true sense of the rod deformation effect, the one end fixing the other end hinged branch of slender compressive bar small bending deflection line equation as a unified deflection line equation was put forward, which was substituted respectively into pressure rod ends hinge branch instability, pressure rod end fixed the other end free instability, pressure rod ends solid lost stability, compression bar end fixed the other end directional movable clamp buckling critical force boundary conditions of the method. The results show that two ends are fixed destabilizing hinge buckling critical force Euler formula, length factor  $\mu=1$ ; one end of the destabilizing critical Euler formula hinged, length factor  $\mu=0.7$ ; one end of the columns is fixed and the other end destabilizing freedom critical Euler formula, the length factor  $\mu=2$ ; both ends are fixed loss of solid stability destabilizing critical Euler formula, length factor  $\mu=0.5$ ; one end of the columns is fixed and the other end can be directed to Euler formula about clamping instability critical force, length factor  $\mu=1$ . Using this method to deduct the Euler's formula about the pressure lever critical stable force, and the result really reflects the whole deformation effect of the bar, reveals the essential difference between the rod pressure stability and pull, pressure, bending, twisting.

**Key words:** slender compressive bar; small bending; pressure lever stability; critical force; Euler formula

本文编辑:张 瑞