

Cosserat 弹塑性模型在 ABAQUS 中的数值实施

彭从文¹, 董龙彬², 吴 群³

(1. 长江大学 城市建设学院, 湖北 荆州 434023; 2 荆州市城市规划设计研究院, 湖北 荆州 434000;
3. 深圳中广核工程设计有限公司, 广东 深圳 518031)

摘 要:利用大型有限元软件 ABAQUS 提供的接口程序 UEL, 开发了压力相关弹塑性 Cosserat 连续体材料的用户单元. 采用平面八节点等参单元, 包括平动与转动三个自由度, 考虑相关联流动的 Drycjer-Prager 材料模型, 应力计算采用四阶龙格-库塔法. 利用该单元分析了材料局部化问题中网格密度与材料特征长度的影响. 结果表明, 网格密度对材料剪切带厚度与等效塑性应影响很小; 随着特征长度增大, 剪切带厚度增大, 等效塑性应变峰值减小.

关键词:Cosserat 模型; FEM; ABAQUS; UEL; 局部化

中图分类号:TB12 **文献标识码:**A **doi:**10.3969/j.issn.1674-2869.2011.06.024

0 引 言

偶应力理论是微极理论的一个特例, Cosserat 兄弟最先提出了完整的偶应力理论^[1], Toupin^[2], Mindlin 等^[3]对该理论作了进一步的发展和完善. Cosserat 理论引入了旋转自由度和相应的微曲率, 引入了与微曲率能量共轭的偶应力、以及具有“特征长度”意义的尺度参数. 该理论可以较好地处理网格敏感性和控制方程失去椭圆性的问题, 近年来, 由于细观力学、非均质力学的发展, Cosserat 理论重新受到关注, 逐渐成为研究热点之一.

数值方法是重要的研究手段之一, 为了提高计算精度与效率, 基于大型通用数值计算平台的二次开发方法得到了广泛的应用. 目前, 许多数值计算平台没有内嵌 Cosserat 计算模型, 关于 Cosserat 模型的二次开发还不多见^[4-6]. ABAQUS 是目前最流行、功能最强的商用有限元软件之一, 该软件可以进行结构静、动力分析, 具有强大的非线性计算能力、丰富的材料库及良好的扩充功能, 自 1997 年进入我国以来, 越来越多的国内企业和研究机构采用 ABAQUS 作为产品研发和科学研究的工具. 本文采用 ABAQUS 的用户接口程序, 研究压力相关弹塑性 Cosserat 连续

体模型的用户子程序 UEL 实施方法.

1 Cosserat 连续体模型

考虑 Cosserat 连续体平面问题, 每个材料点有三个自由度.

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$$

应力、应变分别定义为:

$$\mathbf{S} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yx} \quad m_{xz} \quad m_{yz}]^T$$

$$\mathbf{E} = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{yx} \quad \kappa_{xz} \quad \kappa_{yz}]^T$$

几何方程为:

$$u_{i,j} = u_{j,i} - e_{ijk} \omega_k \quad (1)$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{j,i} \quad (2)$$

静力平衡方程为:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (3)$$

$$m_{ij,i} + e_{ijk} \sigma_{jk} + q_j = 0 \quad (4)$$

式(1)~(4)中, f_i 、 q_j 分别为体积力与体积力偶; e_{ijk} 为排列算子; u_x , u_y , ω_z 分别是平面内平移与转动自由度; m_{xz} , m_{yz} 偶应力; κ_{xz} , κ_{yz} 为微曲率.

对于弹性材料, 其本构关系为^[7]

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}^e \mathbf{E} \quad (5)$$

式(5)中, G , ν , a , l 分别是材料的剪切模量、泊松比、COSSERAT 材料参数及特征长度.

$$\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1+a & 1-a & 0 \\ & \text{sym.} & & & 1+a & 0 \\ & & & & & 4l^2 \\ & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

对于弹塑性 Cosserat 材料,采用基于 Drucker - Prager 屈服准则的弹塑性 Cosserate 连续体模型,其屈服函数与流动势函数分别为^[8]

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \beta \tag{6}$$

$$G = A I_1 + \sqrt{J_2} - B \tag{7}$$

式(7)中,

$$I_1 = \text{tra}(\boldsymbol{\sigma}), J_2 = \frac{1}{2} \left(\mathbf{s}^s : \mathbf{s}^s + \frac{1}{l^2} \mathbf{m} : \mathbf{m} \right), \mathbf{s}^s = \frac{\mathbf{s} + \mathbf{s}^T}{2},$$

其中, α, β, A, B 为材料参数, $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}$ 分别为应力与偏应力张量。

Cosserat 连续体弹塑性本构关系推导方法同经典连续介质力学,应力应变增量关系为

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{D}^e \dot{\mathbf{E}} \tag{8}$$

式(8)中,

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \mathbf{D}^e}{\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} - H}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{s}^s}{2\sqrt{J_2}} + \alpha \mathbf{I} \\ \frac{1}{2\sqrt{J_2}l^2} \mathbf{m} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{s}^s}{2\sqrt{J_2}} + A \mathbf{I} \\ \frac{1}{2\sqrt{J_2}l^2} \mathbf{m} \end{bmatrix}.$$

内变量采用等效塑性应变, $\bar{\gamma}^p$ 为

$$\dot{\bar{\gamma}}^p = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + l^2 \dot{\mathbf{k}} : \dot{\mathbf{k}}}$$

硬化项定义为

$$H = -\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -\left(I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\gamma}^p} - \frac{\partial \beta}{\partial \bar{\gamma}^p} \right) \frac{\partial \bar{\gamma}^p}{\partial \lambda}$$

2 UEL 实现方法及计算流程

2.1 子程序编写注意事项

(1)ABAQUS 提拱了两类单元自定义方法。一类是线性单元,可以通过结果文件或 INP 文件直接给出,不需要编写 UEL;另一类就是通用单元,通过 UEL 子程序定义;

(2)UEL 子程序中更新变量与分析问题类别有关。同一个模型中可能遇到不同的分析步,如地应力平衡、静力分析、摄动步分析等,因此,编写 UEL 时要区别处理;

(3)UEL 允许自定义荷载,包括集中荷载、均布荷载及弯矩等。其中,对于均布荷载,须定义荷载标志号;

(4)自定义单元在 ABAQUS/CAE 中不可见。若想在 ABAQUS/CAE 中显示自定义单元变形图,可以将 ABAQUS 标准单元与自定义单元绑定,同时将标准单元材料参数设为小值。UEL 子程序中所有输出变量均通过 SDV 写入结果文件(.fil、.dat),其分量在 ABAQUS/CAE 中不可见。

2.2 AMATRX 与 RHS 计算

UEL 界面与 ABAQUS 内核主要通过 AMATRX 与 RHS 等变量进行数值传递。本文采用八节点等参单元,设单元节点位移、插值函数与位移应变转换矩阵分别为 \mathbf{d}, \mathbf{N} 与 \mathbf{B} ,单元内任一点位移 \mathbf{u} 及应变 $\boldsymbol{\epsilon}$ 为

$$\mathbf{u} = \sum N_i \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \tag{10}$$

式(9~10)中, $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$

$\mathbf{B} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_2 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & -N_8 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & N_8 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8, N_2 = \hat{N}_2 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6,$$
$$N_3 = \hat{N}_3 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7, N_4 = \hat{N}_4 - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8,$$
$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi)$$
$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi)$$
$$\hat{N}_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \hat{N}_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$
$$\hat{N}_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \hat{N}_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

将式(9)、(10)代入 Cosserat 介质虚功方程(11)进行方程离散.

$$\int_V \delta \mathbf{E} : \mathbf{s} dv = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dv + \int_\Gamma \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (11)$$

式(11)中, $\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ q]^T, \mathbf{t} = [t_x \ t_y \ M]^T$
对于线性问题,结合材料本构关系,得到式(12).

$$\left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \right) \mathbf{d} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dv + \int_\Gamma \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (12)$$

式(12)中, $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv, \mathbf{f}' = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dv + \int_\Gamma \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma.$

将式(12)简记为

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}' \quad (13)$$

对于非线性问题,采用 Newton - Raphson 方法,将式(13)改写为

$$\phi(\mathbf{d}) = \mathbf{K}(\mathbf{d}) \mathbf{d} - \mathbf{f}' \quad (14)$$

设 $\psi(\mathbf{d})$ 为具有一阶导数的连续函数,初始近似值为 $\mathbf{d}^{(0)}$,第 i 次迭代的近似值为 $\mathbf{d}^{(i)}$.将函数 $\psi(\mathbf{d})$ 在 $\mathbf{d}^{(i)}$ 处展开,保留线性项,忽略高阶项得:

$$\psi(\mathbf{d}^{(i)}) + \mathbf{K}_T^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} \approx 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \Delta \mathbf{d}^{(i)} \quad (16)$$

式(15)中, $\mathbf{K}_T^{(i)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{\mathbf{d} = \mathbf{d}^{(i)}}$, $\mathbf{K}_T^{(i)}$ 与 $\Psi(\mathbf{d})$ 分别为 UEL 中需更新变量 AMATRX 与 RHS.

2.3 计算流程

计算流程如图 1 所示.

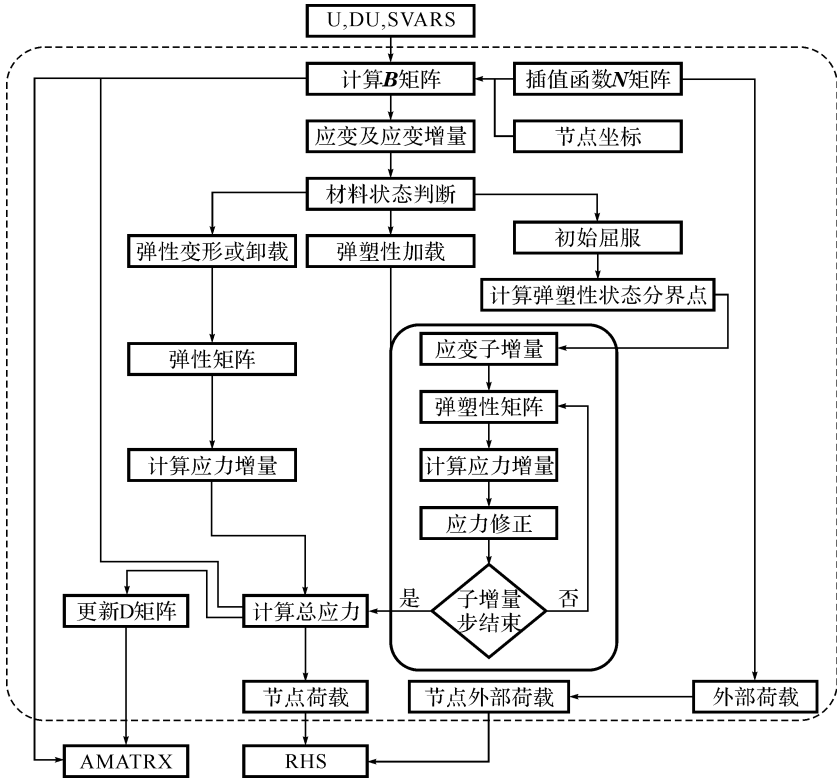


图 1 UEL 流程图
Fig. 1 Flow of UEL

3 性状分析

3.1 有限元模型

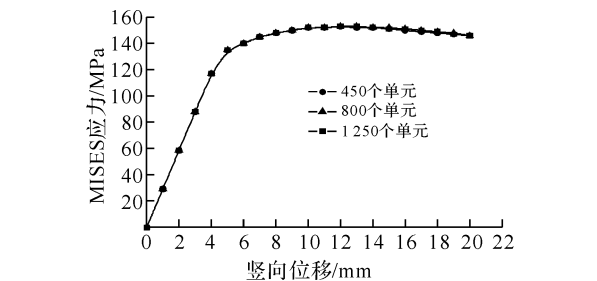
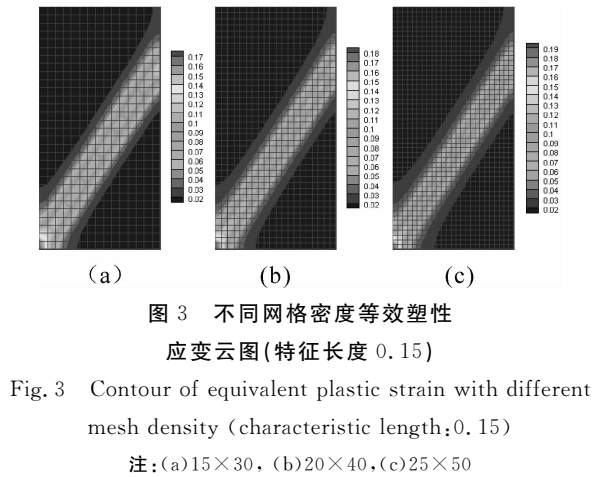
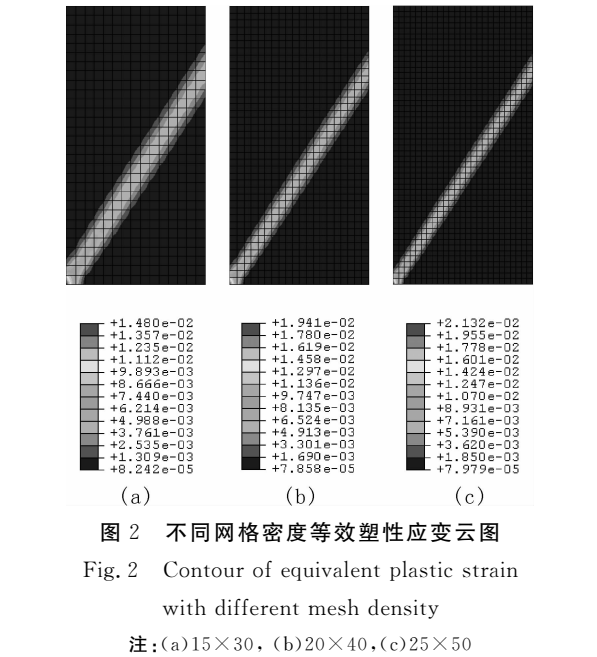
模型几何尺寸 $10 \times 5 \text{ m}^2$,采用三种不同网格密度,单元数分别是 $15 \times 30, 20 \times 40, 25 \times 50$. 边界条件为底端竖向固定,左侧水平向固定. 材料弹性模量 25 GPa ,泊松比 0.3 ,内摩擦角 35° ,粘聚力 1.5 MPa ,

软化模量 15 MPa . 采用相关联流动法则. 顶部采用位移加载方式,加载量为 20 mm ,加载方向向下. 为了触发局剪切带,对左下角单元弱化处理. 采用高斯完全积分,四阶龙格-库塔显式应力积分方法.

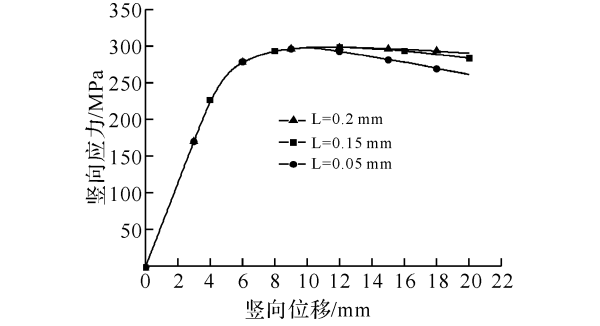
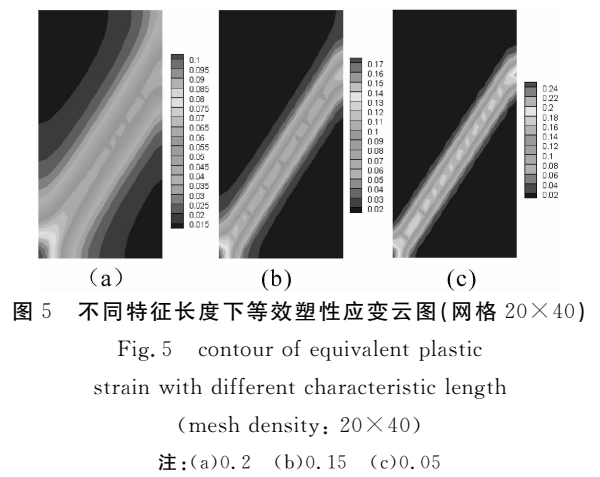
3.2 计算结果

计算模型分析了不同网格密度及特征长度的影响,计算结果如图 2~6 所示.

(1)局部化带的客观性.图 2 为经典连续介质理论得到的等效塑性应变云图,图 3 与图 4 分别是采用 Cosserat 理论计算得到的等效塑性应变云图与应力应变曲线.由图可知,采用 Cosserat 理论计算时,随着网格密度增加,剪切带厚度与等效塑性应变峰值基本不变.当采用经典连续介质理论计算时,计算结果有明显的网格依赖性,随着网格密度增加,软化带逐渐变窄,等效塑性应变峰值也不断增大,计算收敛趋于弱化.



(2)特征长度的影响. Cosserat 理论引入特征长度作为正则化机制,特征长度决定 Cosserat 连续体模型模拟应变局部化问题的能力并影响局部化剪切带宽度大小.图 5 与图 6 分别为不同特征长度下采用 Cosserat 理论计算得到的等效塑性应变云图和应力位移曲线.由图 2~6 可知,随着特征长度增大,剪切带厚度增大,等效塑性应变峰值减小,材料软化模量降低.



4 结 语

基于 ABAQUS 接口程序 UEL,开发了压力相关弹塑性 Cosserat 连续体材料的用户单元,并采用该单元分析了有限元网格密度及材料特征长度对材料局部化的影响.结果表明,采用 Cosserat 理论计算时网格密度对材料剪切带厚度、等效塑性应变影响很小,这也在一定程度上说明本文方法的正确性.要特别说明的是,基于 ABAQUS 平台进行二次开发能有效地利用现有程序代码,减小开发工作量,缩短有限元程序开发周期,极大地提高科研工作效率.

参考文献:

[1] Cosserat E, Cosserat F. Theorie des Corps Deformables [M]. Paris: Herman et Fils, 1909.

[2] Toupin R A. Elastic materials with couple stresses [J]. Archive Rational Mechanics and analysis, 1962 (11): 385 – 414.

[3] Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple stresses in linear elasticity [J]. Archive Rational Mechanics and analysis, 1962(11): 415 – 448.

[4] 杨乐, 吴德伦, 许年春. 偶应力理论的层状岩体洞室数值模拟[J]. 重庆建筑大学学报, 2008, 30(3):73 – 77.

[5] 尹雪英, 杨春和, 李银平. 层状盐岩体三维 Cosserat 介质扩展本构模型的程序实现 [J]. 岩土力学, 2007,28(7):1415 – 1420,1426.

[6] 朱珍德, 秦天昊, 王士宏, 等. 基于 Cosserat 理论的柱状节理岩体各向异性本构模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010,29(增 2): 4068 – 4076.

[7] Sharbati E, Naghdabadi R. computational aspects of the cosserat finite element analysis of localization phenomenon [J]. Computational materials science, 2006(38):303 – 315.

[8] HAYDAR ARSLAN. Localization analysis of granular materials in cosserat elastoplasticity – formulation and finite element Implementation [D]. Colorado: University of Colorado, 2006, 85 – 88.

Numerical implementation of elasto-plastic Cosserat continuum model in ABAQUS

PENG Cong – wen¹, DONG Long – bing², WU Qun³

(1. School of Urban Construction, Yangtze University, Jingzhou 434023, China;2. Jingzhou Urban Planning & Design Institute, Jingzhou 434000, China; 3. China Nuclear Power Design Company LTD(Shenzhen), Shenzhen 518031, China)

Abstract: The subroutine UEL embedded in commercial FEM software ABAQUS is utilized to develop a user element based on the material of pressure-dependent elasto-plastic Cosserat continuum model. The user element adopt plane eight-node isoparametric unit which include three degree of freedom (two translation and one rotation) at each node. The Drucker-Prager material model with associate flow rule is used, and the stress integration algorithm is four-order Runge-Kutta method. The user element is used to analyze the influence of mesh density and the material characteristic length in the material localization problem. The results show that the thickness of shear band and the equivalent plastic strain are independent of mesh density, with the increase of the material characteristic length, the thickness of shear band and the equivalent plastic strain decrease constantly.

Key words: Cosserat model; FEM; ABAQUS; UEL; localization

本文编辑:陈小平



(上接第 84 页)

Control system design of blushless DC motor based on personal computer

ZHOU Chuan – lin, YANG Zhi, XIAO Yong – jun, ZENG Qing – dong

(1. School of Physics and Electronic Information Engineering, Xiaogan University, Xiaogan 432000, China;
2. School of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Speed control and its relative information feedback to display on PC of blushless DC motor is one of the important contents for position control system. According to the need for project, control system for blushless DC motor, whose core is DSP 2407, is designed and a relevant user interface is also established based on personal computer, and M/T speed measurement method is adopted for real-time feedback of motor speed. The whole system block diagram is described and algorithm flow for lower computer is also detailed. The experiment shows that upper computer seed commands to lower computer via serial port, and lower computer DSP2407 can receive and process these commands in real-time, and control the action of blushless DC motor, finally feedback relative information to personal computer for display.

Key words: TMS320LF2407A; blushless DC motor; user interface; photoelectric encoder

本文编辑:陈锦华