文章编号:1674-2869(2010)11-0101-03

函数组的广义线性相关性

杨建华[1,2],柳翠华[1,2]
(1.武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074;
2.武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室,湖北 武汉 430074)

摘　要:将函数组的线性相关与线性无关的概念加以引伸提出了函数组的广义线性相关与广义线性无关、函数组之间广义等价等概念,探讨广义线性相关、广义线性无关的条件,并得到一些有关的结论.

关键词:函数组;广义线性相关;广义线性无关;广义等价
中图分类号:O151;O173　　文献标识码:A　　doi:10.3969/j.issn.1674-2869.2010.11.027

文献[1]给出了数列组的齐次线性相关性,文献[2~5]给出了函数组的线性相关性,但其具有很大的局限性,例如函数组 $A: f(x)=x$, $g(x)=2x+1$,显然有很强的线性相依关系,但此函数组不是线性相关的.为此,有必要将函数组线性相关的概念加以延伸,使之具有更广泛的适应性.本文借用文献[2]中数列组的广义线性相关性的概念,提出了函数组的广义线性相关性.

1　定　义

定义1　定义在区间 I 上的 n 个函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 称为一个函数组.

定义2　给定函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$,对任何一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 称

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)$$

为函数组 A 的一个线性组合;称

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)+a(a\text{ 为常数})$$

为函数组 A 的一个广义线性组合,其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 称为这个线性组合的系数.当 $a=0$ 时,称为齐次线性组合;当 $a\neq0$ 时,称为非齐次线性组合.

定义3　如果函数 $y(x)$ 为函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 的一个广义线性组合,即存在一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,以及常数 a,使得

$$y(x)=k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)+a$$

则称函数 $y(x)$ 可以由函数组 A 广义线性表出(或广义线性表示).当 $a=0$ 时,称函数 $y(x)$ 可以由函数组 A 齐次线性表出(或齐次线性表示);当 $a\neq0$ 时,称函数 $y(x)$ 可以由函数组 A 非齐次线性表出(或非齐次线性表示).

定义4[3-5]　设 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为一定义在区间 I 上的函数组,如果存在 n 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使得当 $x\in I$ 时有恒等式

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv0$$

成立,那么称函数组 A 在区间 I 上线性相关;否则称线性无关.

定义5　设 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为一定义在区间 I 上的函数组,如果存在一组不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,以及常数 a,使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)+a\equiv0$$

则称函数组 A 在区间 I 上广义线性相关,当 $a=0$ 时,称函数组 A 齐次线性相关;当 $a\neq0$ 时,称函数组 A 非齐次线性相关;否则称函数组 A 广义线性无关.

显然,(1)如果函数组 A 中含有常数函数 C,则函数组 A 一定广义线性相关.

(2)函数组 A 广义线性无关的充分必要条件为:对任意常数 a,如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)+a\equiv0$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 一定全为零,即 $k_1=k_2=\cdots k_n=0$.

进而有函数组 A 广义线性无关的充分必要条件为:如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv0$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 一定全为零,即 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.因此有

(3)广义线性无关的函数组一定齐次线性无关.

(4)齐次线性相关的函数组一定广义线性相关.

收稿日期:2010-01-07
作者简介:杨建华(1959-),男,湖北嘉鱼人,副教授.研究方向:灰色理论及其应用和基础数学.

定义 6　如果函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 中，存在 $r(0 \leqslant r \leqslant n)$ 个函数 $y_{i_1}(x), y_{i_2}(x), \cdots, y_{i_r}(x)$（称为 A 的子函数组）满足：

(1) $y_{i_1}(x), y_{i_2}(x), \cdots, y_{i_r}(x)$ 广义线性无关；

(2) 函数组 A 中的任何一个函数都可以由 $y_{i_1}(x), y_{i_2}(x), \cdots, y_{i_r}(x)$ 广义线性表出，则称这 r 个函数所构成的函数组 $y_{i_1}(x), y_{i_2}(x), \cdots, y_{i_r}(x)$ 为函数组 A 的一个广义极大线性无关组，其中 r 称为函数组 A 的秩，记作 $R(A)$，即 $R(A)=r$.

定义 7　设 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$，$B: z_1(x), z_2(x), \cdots, z_m(x)$ 为两个函数组，如果函数组 B 中的任一函数都可以由函数组 A 广义线性表出，则称函数组 B 可以由函数组 A 广义线性表出.

定义 8　设 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$，$B: z_1(x), z_2(x), \cdots, z_m(x)$ 为两个函数组，如果函数组 A 与 B 可以相互广义线性表出，则称函数组 A 与 B 广义等价.

2　定　理

定理 1　函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 广义线性相关的充分必要条件为函数组 A 中至少有一个函数可以由其余的函数所构成的函数组广义线性表出.

证明　(充分性) 如果函数组 A 中有某个函数，比如 $y_n(x)$ 可以由其余的函数广义线性表出

$$y_n(x)=k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_{n-1}y_{n-1}(x)+a$$

则

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_{n-1}y_{n-1}(x)-y_n(x)+a\equiv 0$$

即函数组 A 广义线性相关.

(必要性) 如果函数组 A 广义线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，不妨设 $k_m \neq 0$，以及常数 a，使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)+a\equiv 0$$

则

$$y_n(x)=-\frac{1}{k_n}(k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_{n-1}y_{n-1}(x)+a)$$

即函数 $y_n(x)$ 可以由其余的函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_{n-1}(x)$ 广义线性表出.

定理 2　函数组 $A: y_1(x), y_2(x), y_n(x)$ 广义线性相关的充分必要条件为函数组 A 的秩小于，即 $R(A)<n$.

证明　充分性显然，下证必要性.

设函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 广义线性相关，即存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，不妨设 $k_n \neq 0$，以及常数 a 使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)+a\equiv 0$$

则

$$y_n(x)=-\frac{1}{k_n}(k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_{n-1}y_{n-1}(x)+a)$$

即函数 $y_n(x)$ 可以由其余的函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_{n-1}(x)$ 广义线性表出. 而其余的函数当然可以由其自身广义线性表出，因此，由定义函数组 A 的秩 $R(A)<m$.

推论　函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 广义线性无关的充分必要条件为它的秩 $R(A)=n$.

定理 3　函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 与其任一个广义极大线性无关组等价.

证明　不妨设 $A_0: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_r(x)$ 为其一个广义极大线性无关组，显然，函数组 A_0 可以由函数组 A 广义线性表出，反过来，由定义 6 可知，函数组 A 可以由 A_0 广义线性表出，所以 A 与 A_0 广义等价，即函数组 A 与其一个广义极大线性无关组等价.

定理 4　函数组 $B: z_1(x), z_2(x), \cdots, z_m(x)$ 可以由函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性表出的充分必要条件是 A 的秩等于由 A 组和 B 组所构成的新的函数组 $C: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), z_1(x), z_2(x), \cdots, z_m(x)$ 的秩，即 $R(A)=R(C)=R(A,B)$.

证明　设 $A_0: y_{i_1}(x), y_{i_2}(x), \cdots, y_{i_r}(x)$ 为函数组 A 的一个广义极大线性无关组.

充分性：由 $R(A)=R(C)=R(A,B)$ 知，A_0 也为 C 的一个广义极大线性无关组，所以，C 中的任一函数都可以由 A_0 广义线性表出，由此可知函数组 B 中的任一函数都可以由 A_0 广义线性表出，进而可以由函数组 A 广义线性表出.

必要性：设函数组 B 可以由函数组 A 广义线性表出，而函数组 A 可以由 A_0 广义线性表出，因此函数组 C 可以由 A_0 广义线性表出，所以，A_0 为函数组 C 的一个广义极大线性无关组，所以 C 的秩等于函数组 A 的秩，即 $R(A)=R(C)=R(A,B)$.

定理 5　如果函数组 $B: z_1(x), z_2(x), \cdots, z_m(x)$ 可以由函数组 $A: y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 广义线性表出，则函数组 B 的秩不超过函数组 A 的秩，即 $R(B)\leqslant R(A)$.

证明　由定理 4 有 $R(A)=R(A,B)$，而 $R(B)\leqslant R(A,B)$，所以 $R(B)\leqslant R(A)$.

定理6　如果函数组A与函数组B广义等价，则A的秩等于B的秩，即$R(A)=R(B)$.

证明　由定理5及函数组广义等价的定义即知结论成立.

定理7　如果函数$y_1(x)$，$y_2(x)$广义线性相关，且系数都不为零，即存在全不为零的实数k_1，k_2使得$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+a\equiv 0$，则$y_1(x)$，$y_2(x)$的极限同时存在或者同时不存在.

证明　由极限的运算性质即得.

定理8　如果函数组A广义线性相关，且A中的任一函数的极限存在，则它的任一广义线性组合的极限也存在，且等于极限的相同广义线性组合.

证明　由定义5及极限的运算性质即得.

定理9　如果函数组A：$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$广义线性相关，则其导函数组A'：$y'_1(x)$，$y'_2(x)$，…，$y'_n(x)$必线性相关，函数行列式

$$\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=0.$$

证明　因为函数组A：$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$广义线性相关，所以存在一组不全为零的数k_1，k_2，…，k_m，以及常数a，使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)+a\equiv 0$$

因此

$$k_1y'_1(x)+k_2y'_2(x)+\cdots+k_ny'_n(x)\equiv 0$$

即导函数组A'：$y'_1(x)$，$y'_2(x)$，…，$y'_n(x)$线性相关，进而知方程组

$$\begin{cases} y'_1(x)x_1+y'_2(x)x_2+\cdots+y'_n(x)x_n=0 \\ y''_1(x)x_1+y''_2(x)x_2+\cdots+y''_n(x)x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)}(x)x_1+y_2^{(n)}(x)x_2+\cdots+y_n^{(n)}(x)x_n=0 \end{cases}$$

有非零解，故系数行列式

$$\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

3　例　题

例1　函数组A：x，$2x$，$3x+1$广义线性相关，函数x为A一个广义极大线性无关组，同样函数x和$3x+1$也分别都是A的广义极大线性无关组.

例2　证明函数组A：x，x^2广义线性无关.

证明　如果存在一组数k_1，k_2，以及常数a使得

$$k_1x+k_2x+a=0$$

则分别取$x=1$，$x=2$，$x=3$，得方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+a=0 \\ 2k_1+4k_2+a=0 \\ 3k_1+9k_2+a=0 \end{cases}$$

其只有零解，$k_1=k_2=0$，$(a=0)$，所以函数组A广义线性无关.

例3　函数组A：$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{2x}+1$广义线性相关，且当$x\to\infty$时分别有极限0和1，它的任一线性组合

$$k_1\frac{1}{x}+k_2\left(\frac{1}{2x}+1\right)+a$$

当$x\to\infty$时也收敛，且有极限$0k_1+1k_2+a=k_1+a$.

例4　函数组A：$x^2+\dfrac{1}{x}$，$x^2-\dfrac{1}{x}$线性无关，且当$x\to\infty$都没有极限，但

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{3}$$

当$x\to\infty$时有极限为0.

参考文献：

[1]　杨建华．数列组的齐次线性相关性[J]．武汉工程大学学报，2009，31(9)：84－85，88.

[2]　杨建华．数列组的广义线性相关性[J]．武汉工程大学学报，2009，31(12)：79－81，

[3]　叶彦谦．常微分方程讲义[M]．北京：人民教育出版社，1981：140，

[4]　中山大学数学力学系常微分方程组．常微分方程[M]．北京：人民教育出版社，1979：92.

[5]　同济大学应用数学系．高等数学第五版（下册）[M]．北京：高等教育出版社，2002：296.

（下转第107页）

Study on first-principles of electronic structure of $Ni[N(CN)_2]_2$

ZU Feng-xia, *LIU Min-min*
(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: This paper is devoted to examining the electronic structure and magnetic behavior of molecule-based magnet $Ni[N(CN)_2]_2$, using first principles within the full potential linearized augmented plane wave (FP-LAPW) method based on the density functional theory (DFT). The total energy and the density of states and atomic spin magnetic moments are calculated and discussed. $Ni[N(CN)_2]_2$ is found to stabilize in a ferromagnetic semiconductor. the ferromagnetic interaction originates mainly from the Ni atoms.
Key words: density of states; electronic structure; ferromagnetic coupling

本文编辑:龚晓宁

☆

(上接第 103 页)

Non-homogeneous linear correlation of function group

YANG Jian-hua[1,2], *LIU Cui-hua*[1,2]
(1. School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China;
2. Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, the concepts of homogeneous linear correlation and homogeneous linear independence, and homogeneous equivalence of function group are extended to such concepts as generalized linear correlation and generalized linear independence, generalized equivalence in function group. The condition for generalized linear correlation and generalized linear independence is discussed, and the relevant result is acquired.
Key words: function group; generalized linear correlation; generalized linear independence; generalized equivalence

本文编辑:龚晓宁