第 31 卷第 5 期　　武 汉 工 程 大 学 学 报　　Vol. 31 No. 5
2009 年 05 月　　J. Wuhan Inst. Tech.　　May 2009

文章编号：1674 - 2869(2009)05 - 0093 - 02

一致矩阵的特征性质

胡端平，唐　超
（武汉工程大学理学院，湖北 武汉 430074）

摘　要：一致矩阵是层次分析的理论基础. 本文给出了正互反矩阵 **A** 为一致的充分必要条件是 rank(**A**)－1，且 a_{ii}－1，并且给出了一种新的一致性检验指标 $KI-\frac{\mathrm{rank}(\mathbf{A})-1}{n-1}$，同时给出了正矩阵为一致矩阵的充分必要条件.

关键词：正互反矩阵；一致矩阵；一致性检验指标
中图分类号：O151.21　　文献标识码：A

层次分析的理论基础是两类矩阵和它们的特征值与特征向量，这两类矩阵就是正互反矩阵和一致矩阵. 在层次分析中，我们碰到的是正互反矩阵 **A**，**A** 近似为一致矩阵，那么必须检验 **A** 的一致性. 本文给出了正互反矩阵为一致矩阵的充要条件，并据此给出了一种新的一致性检验的指标.

1　定义与引理

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，若 $a_{ij}>0,1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m$，则称 **A** 为正矩阵，特别，当 $m=1$ 时，称 **A** 为正向量.

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times m}$ 为正矩阵，若 $a_{ij}=a_{ji}^{-1},1\leqslant i,j\leqslant n$，则称 **A** 为正互反矩阵或比较矩阵.

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times m}$ 为正矩阵，若 $a_{ij}=a_{ik}a_{kj},k=1,2,\cdots,n,1\leqslant i,j\leqslant n$，则称 **A** 为一致矩阵.

引理[1-3]　（满秩分解）设 **A** 为 $n\times m$ 矩阵，且 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=r$，则存在 $n\times r$ 的列满秩阵 F 与 $r\times m$ 的行满秩阵 $A=FG$.

2　一致矩阵的特征性质

以下设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正矩阵.

定理 1[4-6]　**A** 为一致矩阵的充分必要条件为存在正向量 $\mathbf{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，使得 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$.

证：必要性. 设 **A** 为一致矩阵，则 $a_{ij}>0,a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$，有 $a_{ii}=a_{ik}a_{ki}\underline{k=i}a_{ii}^2$，于是 $a_{ii}=1,a_{ij}a_{ji}=a_{ii}=1$，即 $a_{ij}=a_{ji}^{-1}$，从而 $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}=\frac{a_{ik}}{a_{jk}},k=1,2,\cdots,n$，取 $k=1$，并令 $w_i=a_{i1},1\leqslant i\leqslant n$，故 $a_{ij}=\frac{a_{i1}}{a_{j1}}=\frac{w_i}{w_j},1\leqslant i,j\leqslant n$.

充分性. 若 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j},w_i>0$，有 $a_{ik}a_{kj}=\frac{w_i}{w_k}\frac{w_k}{w_j}=\frac{w_i}{w_j}=a_{ij},1\leqslant i,j,k\leqslant n$，故 **A** 为一致矩阵.

可见 **A** 为一致矩阵的充分必要条件为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}(w_1^{-1},w_2^{-1},\cdots,w_n^{-1}),w_i>0,1\leqslant i\leqslant n.$$

推论 1　设 **A** 为一致矩阵，则 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=1$.

定理 2　设 **A** 为正互反矩阵，若 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=1$，则 **A** 为一致矩阵.

证：$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n},a_{ij}>0,a_{ij}=a_{ji}^{-1},1\leqslant i,j\leqslant n$，由 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=1$，存在

$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，使

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(u_iv_j)_{n\times n},$$

$a_{ij}=u_iv_j$，由 $a_{ii}=1$ 有 $u_iv_i=1$，即 $v_i=u_i^{-1},1\leqslant i\leqslant n$，从而 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}(u_1^{-1},u_2^{-1},\cdots,u_n^{-1})=(u_iu_j^{-1})_{n\times n}$，

并由 $a_{ij}=\frac{u_i}{u_j}>0$ 可取 $u_i>0,1\leqslant i\leqslant n$，从而 **A** 为一

收稿日期：2009 - 07 - 04
作者简介：胡端平（1950 -），男，湖北孝感人，教授. 研究方向：多元统计分析.

致的.

推论 2[7-8]　设 $\mathbf{A}$ 为正互反矩阵，但非一致的，则 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})>1$.

由此，我们可以建立一种新的一致性检验，称

$$KI=\frac{\mathrm{rank}(\mathbf{A}-1)}{n-1}$$

为 $\mathbf{A}$ 的一致性的秩检验指标，显然 $0\leqslant KI\leqslant 1$，当 KI 越小时，$\mathbf{A}$ 的一致性越好，否则越差，我们也可以与 sauty 的一致性检验指标[1]联合使用，将 $KCR=KI\cdot CR$ 作为 $\mathbf{A}$ 的一致性检验指标.

定理 3　$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正矩阵，则 $\mathbf{A}$ 为一致矩阵的充分必要条件为 $u_iu_i=1$，且 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=1$，$1\leqslant i\leqslant n$.

证：必要性显然. 下证充分性. 由 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=1$，则存在 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，$u_i>0$，$v_i>0$，$1\leqslant i\leqslant n$，使得

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(u_iv_j)_{n\times n},$$

由 $a_{ii}=1$ 有 $u_iv_i=1$，即 $v_i=u_i^{-1}$，$1\leqslant i\leqslant n$，故

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}(u_1^{-1},u_2^{-1},\cdots,u_n^{-1})=(u_iu_j^{-1})_{n\times n},$$

从而 $\mathbf{A}$ 为一致矩阵.

参考文献：

[1] Sauty T L. The Analytic Hierarchy Prcess[M]. McGraw-Hill Company,1980.

[2] 陈景良，陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京：清华大学出版社，2001：305-362.

[3] Sauty T L, Alexander J M. Thinking with Models[M]. Oford: Pergamon Prcss,1981.

[4] 赵焕臣，许树柏，和金生. 层次分析法[M]. 北京：科学出版社，1986.

[5] 王莲芬，许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京：中国人民大学出版社，1990.

[6] Lucas W F. Discrete and System Model[M]. Springer-Verlay,1983.

[7] 姜启源. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，1993：306-335.

[8] 许树柏. 层次分析法原理[M]. 天津：天津大学出版社，1990.

The character of consistent matix

HU Duan-ping, TANG Chao

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: The consistent matrix is the analytic hierarchy rationale. This article has given reciprocal matrix $\mathbf{A}$ is the consistent full essential condition is rank $(\mathbf{A})=1$, and given a new consistency test indicator which is $KI=\frac{\mathrm{rank}(\mathbf{A})-1}{n-1}$, and also given a necessary and sufficient condition which is positive matrix for the consistent matrix.

Key words: positive reciprocal matrix; consistent matrix; consistency test indicator

本文编辑：萧　宁